

Алгебраические и трансцендентные уравнения. Общие понятия

Алгебраические и трансцендентные уравнения — два основных класса нелинейных уравнений, которые различаются по типу функций, входящих в их состав.

Алгебраические уравнения

Алгебраическое уравнение — это уравнение, в котором для нахождения корня используются только алгебраические действия: сложение, вычитание, умножение, деление, возведение в степень и извлечение корня. В левой части такого уравнения находится многочлен от неизвестных, а в правой — нуль.

Каноническая форма алгебраического уравнения имеет вид:

$$P_n(x) = a_0 x^n + a_1 x^{(n-1)} + \dots + a_n = 0,$$

где $a_0, a_1, \dots, a_n$ — коэффициенты уравнения, x — неизвестное, n — степень уравнения.

Виды алгебраических уравнений:

- **Целые** — обе части состоят из целых алгебраических выражений по отношению к неизвестным.
- **Дробные** — содержат целые алгебраические выражения в числителе и знаменателе.
- **Иррациональные** — алгебраические выражения находятся под знаком корня.
- **Линейные, квадратные, кубические** — в зависимости от степени переменной.

Методы решения алгебраических уравнений включают разложение на множители, метод группировки, метод неопределённых коэффициентов, замену переменной и другие.

Трансцендентные уравнения

Трансцендентное уравнение — это уравнение, которое содержит одну или более трансцендентных функций, таких как экспоненциальные, логарифмические, тригонометрические и другие. В таких уравнениях переменная находится под знаком непрерывной функции, которая не может быть выражена через конечное число алгебраических операций.

Примеры трансцендентных уравнений:

- $\cos x = x$;
- $\log x = x - 5$;
- $e^x = x$ (имеет известное аналитическое решение)

Методы решения трансцендентных уравнений:

- Численные методы (метод бисекции, метод Ньютона, метод секущих) — используются, когда аналитическое решение сложно найти.
- Графический метод — построение графиков левой и правой частей уравнения и определение точек их пересечения.
- Метод замены переменной — преобразование трансцендентного уравнения в алгебраическое путём введения новой переменной или функции.
- Аналитический метод — использование свойств функций для нахождения аналитического выражения решений.

В некоторых случаях решение трансцендентных уравнений можно свести к решению алгебраических уравнений.

Важно: многие трансцендентные уравнения не имеют аналитических решений, и для их нахождения часто требуются численные методы.

Корень уравнения — это значение переменной, при котором уравнение обращается в тождество, то есть функция, стоящая в левой части уравнения, принимает значение 0.

Методы решения уравнений делятся на две группы:

1. **Точные методы** — позволяют записать корни в виде конечного соотношения (формулы). Известны для тригонометрических, логарифмических, показательных и простейших алгебраических уравнений.

2. **Итерационные методы** — используют последовательные приближения для нахождения решения. Часто применяются для трансцендентных уравнений, так как аналитические методы могут быть недостаточными.

Графические методы могут использоваться для приблизительного определения корней трансцендентных уравнений: строится график левой и правой частей уравнения, определяются точки их пересечения.

Численные методы (например, метод бисекции, метод Ньютона, метод хорд) применяются для нахождения приближённых значений корней как алгебраических, так и трансцендентных уравнений.

Важно: не все уравнения имеют аналитические решения, и это особенно характерно для большинства трансцендентных уравнений. Также в некоторых случаях уравнение может содержать коэффициенты, известные лишь приблизительно, что делает задачу точного определения корней бессмысленной.